

Introduzione all'algebra lineare

Dalla definizione di vettore
ai sistemi lineari

di Nicola Iantomasi

www.yimp.it

Capitolo 1: Vettori

Cos'è un vettore?

Un vettore è una riga (o una colonna) di numeri. Ad esempio sono vettori

$$a = (2 \ 3)$$

$$v = (1 \ -8 \ 5)$$

$$w = (2 \ 4.3 \ -7 \ 9 \ 5)$$

$$d = (3)$$

Definizione

Ognuno dei singoli elementi è detto *componente* del vettore.

Definizione

Un vettore formato da un solo numero (come d) è detto *scalare*. Spesso per gli scalari non usiamo le parentesi. Ad esempio scriviamo $d = 3$

Come si sommano due vettori?

Due vettori si sommano «componente per componente»

Ad esempio se

$$v = (2 \ 2)$$

e

$$w = (4 \ 1)$$

allora

$$v + w = (2+4 \ 2+1) = (6 \ 3)$$

Attenzione! *Vettori con lunghezza diversa non si possono sommare. Ad esempio se $v = (2 \ 4)$, $w = (3 \ 8 \ 15)$ $v + w$ non ha senso*

In formule

$$v = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$$

$$w = (w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n)$$

$$v + w = (v_1+w_1 \ v_2+w_2 \ \dots \ v_n+w_n)$$

Come si sottraggono due vettori?

Analogamente alla somma, due vettori si sottraggono «componente per componente»

$$v = (2 \ 2), \quad w = (4 \ 1)$$

$$v - w = (2-4 \ 2-1) = (-2 \ 1)$$

Osserviamo che come prima, vettori con lunghezza diversa non si possono sottrarre.

In formule

$$v = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$$

$$w = (w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n)$$

$$v - w = (v_1-w_1 \ v_2-w_2 \ \dots \ v_n-w_n)$$

Come si moltiplica un vettore per uno scalare?

Un vettore si moltiplica per uno scalare moltiplicando tutte le componenti del vettore per lo scalare. Ad esempio se

$$a = 2$$

e

$$w = (3 \ 2)$$

allora

$$a * w = 2 * (3 \ 2) = (2*3 \ 2*2) = (6 \ 4)$$

In formule

a scalare

$$v = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$$

$$a*v = (a*v_1 \ a*v_2 \ \dots \ a*v_n)$$

Come si moltiplicano due vettori?

Consideriamo la moltiplicazione nota come **prodotto scalare**

Se

$$v = (2 \ 2)$$

e

$$w = (1 \ 4)$$

allora

$$v * w = (2 \ 2) * (1 \ 4) = 2 * 1 + 2 * 4 =$$

$$= 2 + 8 = 10$$

Per indicare il prodotto scalare tra vettori $v * w$ si usa solitamente questa notazione: $\langle v, w \rangle$

Attenzione! *Il risultato del prodotto scalare tra due vettori è uno scalare*

In formule

$$v = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$$

$$w = (w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n)$$

$$\langle v, w \rangle = v_1 * w_1 + v_2 * w_2 + \dots + v_n * w_n$$

Definizione

Due vettori si dicono tra loro ortogonali se il loro prodotto scalare è pari a 0.

Ad esempio $v = (2 \ 6 \ 3)$ e $w = (-3 \ 0 \ 2)$ sono ortogonali

$$\langle v, w \rangle = 2 * (-3) + 6 * 0 + 3 * 2 = -6 + 0 + 6 = 0$$

Come si calcola la norma di un vettore?

La norma di un vettore è la radice quadrata del prodotto scalare di un vettore con se stesso. Ad esempio se

$$v = (3 \ 4)$$

allora

La norma di v (si indica con $\|v\|$) è uguale a

$$\|v\| = \langle v, v \rangle = \langle (3 \ 4), (3 \ 4) \rangle =$$

$$\sqrt{3 * 3 + 4 * 4} = 5$$

Attenzione

La norma di uno scalare è il suo valore assoluto!

$$\| -3 \| = 3$$

In formule

$$\| v \| = \sqrt{v_1 * v_1 + \dots + v_n * v_n}$$

Definizione

Un versore è un vettore con norma 1. I versori sono detti anche vettori unitari. Ad esempio $v = (1 \ 0)$ è un versore infatti $\| v \| = 1$

Ora prova tu

Dati i tre vettori

$$a = (2 \ 4 \ 6), b = (1 \ 3 \ 2), c = (2 \ 5 \ 1)$$

Calcolare:

1. $a + b$
2. $a - b$
3. $5 * a - 2 * b + 3 * c$
4. $\langle a, c \rangle$
5. $2 * \langle 3 * a, 2 * c \rangle$

$$6. \|a\|$$

$$7. \|b\| * \langle 2 * b, -c \rangle + \|c\| + \langle \|a\| * a, b \rangle$$

Ci sono coppie di vettori ortogonali?

Ci sono vettori unitari?

Capitolo 2: Matrici

Cos'è una matrice?

Una matrice è una tabella di numeri. Ad esempio

$$A = \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{matrix}$$

A è una matrice quadrata 2x2 perché ha 2 righe e 2 colonne
2 è l'elemento di posto (1,1) perché si trova nell'intersezione
tra la prima riga e la prima colonna. Analogamente 3 è
l'elemento di posto (1,2).

Vediamo un altro esempio.

$$B = \begin{matrix} 1 & 8 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \end{matrix}$$

B è una matrice rettangolare 2x4
6 è l'elemento di posto (2, 3)

Attenzione

I vettori sono particolari matrici con una 1 riga oppure 1 colonna

Come si sommano due matrici?

Due matrici si sommano «componente per componente». Ad esempio se

$$A = \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{matrix}$$

e

$$B = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{matrix}$$

allora

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{matrix} 2+1 & 3+2 \\ 4+6 & 5+8 \end{matrix} \\ &= \begin{matrix} 3 & 5 \\ 10 & 13 \end{matrix} \end{aligned}$$

Come si sottraggono due matrici?

Analogamente due matrici si sottraggono «componente per componente». Ad esempio:

$$A = \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{cc} 4 & 5 \\ & 6 & 8 \end{array}$$

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{array}{cc} 2-1 & 3-2 \\ 4-6 & 5-8 \end{array} \\ &= \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{array} \end{aligned}$$

Come si moltiplica una matrice per uno scalare?

Una matrice si moltiplica per uno scalare moltiplicando tutte le componenti della matrice per lo scalare. Ad esempio se

$$A = \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{array}$$

e

$$c = 3$$

allora

$$c \times A = \begin{array}{cc} 3*2 & 3*3 \\ 3*4 & 3*5 \end{array} = \begin{array}{cc} 6 & 9 \\ 12 & 15 \end{array}$$

Quando si possono moltiplicare due matrici?

Due matrici si possono moltiplicare se il numero di colonne

della prima è uguale al numero di righe della seconda. Il risultato è una matrice che ha:

- il numero di righe di A
- il numero di colonne di B

Esempio

Consideriamo **A** una matrice 2×3 e **B** una matrice 3×5 . Posso calcolare $A \cdot B$ perché il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B.

Il risultato sarà una matrice 2×5 (numero di righe della prima e numero di colonne della seconda)

Esempio 2

Consideriamo **A** una matrice 2×4 e **B** una matrice 3×4 . Esse non si possono moltiplicare perché il numero di colonne della prima 4 è diverso dal numero di righe della seconda 3

Attenzione

In generale potrebbe essere possibile calcolare $A \cdot B$, mentre è impossibile calcolare $B \cdot A$.

Si possono calcolare entrambi i prodotti solo se le matrici sono quadrate (stesso numero di righe e colonne). Comunque, la matrice risultante sarà in generale diversa.

Come si moltiplicano due matrici?

Abbiamo detto che se A è una matrice 3×2 e B è una matrice 2×4 , posso calcolare $A \cdot B$ e il risultato è una matrice 3×4

L'elemento (1,1) sarà uguale al prodotto scalare tra la prima riga di A e la prima colonna di B

L'elemento (2,3) sarà uguale al prodotto scalare tra la seconda riga di A e la terza colonna di B

Ad esempio
se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 6 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Allora l'elemento (1,1) di $A \times B$ sarà il prodotto scalare tra (2,3) e (1,6) quindi $2*1 + 3*6 = 20$

Mentre l'elemento (2,3) sarà il prodotto scalare tra (4,5) e (5,3) quindi $4*5 + 5*3 = 35$

Svolgendo tutti i calcoli otteniamo

$$A \times B = \begin{pmatrix} 20 & 28 & 19 & 18 \\ 34 & 48 & 35 & 34 \\ 25 & 34 & 17 & 14 \end{pmatrix}$$

Definizione

La matrice con tutti gli elementi uguali a 0 è detta matrice zero ed è l'elemento neutro rispetto alla somma e sottrazione

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A + 0 = 0 + A = A$$

Definizione

La matrice con 1 sulla diagonale e 0 fuori è detta matrice identità ed è l'elemento neutro rispetto al prodotto

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times I = I \times A = A$$

Ora prova tu

Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad v = 2$$

Calcolare

1. $A + B$
2. $v \times A + v \times B$
3. $A \times B$
4. $B \times A$
5. $A \times B \times C$
6. Sia w il vettore colonna definito dalla prima colonna di B , calcolare $A \times w$

Capitolo 3:

Determinanti e matrici inverse

Come si calcolano i determinanti di matrici 1x1 e 2x2?

Ad una matrice quadrata (stesso numero di righe e di colonne) posso associare un numero detto Determinante della matrice

$$a = 1$$

Il determinante di una scalare (matrice 1x1) è lo scalare stesso
 $\text{Det}(a) = a$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Il determinante di una matrice 2x2 è dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale principale meno il prodotto degli elementi sull'altra diagonale.

Ad esempio per la matrice di sinistra

$$\text{Det}(A) = 2 * 5 - 4 * 3 = 10 - 12 = -2$$

Come si calcolano i determinanti di matrici 3x3?

Per calcolare il determinante di una matrice 3x3 devo inizialmente scegliere una riga o una colonna. Vedremo che tale scelta non influenzerà il risultato finale.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Scegliamo ad esempio la prima riga: 2 3 1

Il determinante di A sarà uguale a

$$\text{Det}(A) = 2 * \text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3 * \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 * \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Prima di continuare con il calcolo dobbiamo chiarire due punti

Perché alcuni elementi della prima riga sono riportati con lo stesso segno mentre altri hanno segno opposto?

Consideriamo una matrice di più o meno come questa

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Da essa deduciamo che gli elementi di posto (1,1) e (1,3) conserveranno il segno, invece l'elemento di posto (1,2) avrà il segno invertito

Come ricaviamo le matrici 2 x 2 il cui determinante è moltiplicato al rispettivo elemento della prima riga?

L'elemento di posto (1,1) sarà moltiplicato per la matrice ottenuta a partire da quella di partenza, eliminando la prima riga e la prima colonna. Ad esempio data

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La sottomatrice relativa al posto (1,1) è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Analogamente l'elemento di posto (1,2) sarà moltiplicato per il determinante della matrice ottenuta a partire da quella di partenza, eliminando la prima riga e la seconda colonna.

Possiamo ora concludere il calcolo del determinante

$$\begin{aligned} \text{Det}(A) &= 2 * \text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3 * \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 * \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= 2 * (0*1 - 1*1) - 3 * (2 * 1 - 1 * 1) + 1 * (2 * 1 - 0 * 1) = \\ &= 2 * (-1) - 3 * 1 + 1 * 2 = -3 \end{aligned}$$

Esercizio: Calcolare il determinante della stessa matrice scegliendo un'altra riga o un'altra colonna. Verificare che il risultato ottenuto non cambia.

Osservazione:

Poiché il risultato del determinante non cambia in base alla riga o alla colonna scelta, conviene scegliere quella con il maggior numero di zeri in modo da effettuare il minor numero possibile di calcoli.

Il procedimento qui illustrato si applica iterativamente ad una matrice di dimensione qualsiasi. La matrice dei segni di una 4x4 sarà analogamente

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

+ - + -
- + - +

Come si calcola l'inverso di uno scalare?

Dato un numero a , il suo **inverso** è quel numero b tale che

$$a * b = 1$$

Ad esempio l'inverso di 3 è $1/3$ perché $3 * 1/3 = 1$

L'inverso di $2/5$ è $5/2$ perché $2/5 * 5/2 = 1$

Tutti i numeri diversi da zero hanno un inverso.

Quando una matrice è invertibile?

Ci chiediamo se una matrice quadrata A è invertibile, cioè se esiste una matrice B tale che

$$A * B = I$$

dove I è la matrice identità (con 1 sulla diagonale e zero fuori)

Teorema:

Una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero

Come si calcola l'inversa di una matrice?

L'inversa di una matrice si può calcolare (quando esiste) con i

seguenti passi:

1) Costruire una matrice in cui al posto (i, j) è presente il determinante della matrice ottenuta eliminando la i -esima e la j -esima riga

Ad esempio da

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

otteniamo nel posto $(1,1)$ il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ottenuta eliminando prima riga e la prima colonna

2) Confermare o meno il segno degli elementi precedenti confrontando la posizione con i valori della matrice dei segni

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Otteniamo a questo punto la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

3) Trasporre la matrice ottenuta al passo 2 (cioè invertire righe e colonne)

A partire dalla matrice precedente

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Otteniamo dunque

$$\begin{array}{ccc} -1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{array}$$

4) Moltiplicare la matrice ottenuta al passo 3 per lo scalare $1/\det(A)$

A partire dalla matrice del passo 3,

$$\begin{array}{ccc} -1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{array}$$

Ricordando che $\det(A) = -3$, abbiamo

$$\begin{array}{ccc} 1/3 & 2/3 & -1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & -2 \end{array}$$

Chiamiamo tale matrice A^{-1}

Ora prova tu

1) Verificare che

$$A * A^{-1} = I$$

2) Verificare che

$$A^{-1} * A = I$$

3) Verificare se è invertibile e nel caso calcolare l'inversa della matrice

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}$$

Capitolo 4:

Sistemi lineari

Cos'è un sistema lineare?

Un sistema lineare è un sistema di equazioni in cui tutte le incognite appaiono al **primo grado**.

Esempio

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

$$3x_1 - x_3 = 0$$

È un sistema lineare di **tre equazioni** in **tre incognite**

Ad esempio

$$x_1 + 3x_2 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

$$3x_1 - x_2 = 0$$

$$2x_1 - x_2 = 1$$

è un sistema lineare di quattro equazioni in due incognite (x e y)

$$x_1 + 3x_2^2 = 3$$

$$\mathbf{\log}(x_1) + 2x_2 = 5$$

Non è un sistema lineare perché appaiono delle incognite al secondo grado o con una funzione logaritmica

Come sono legati sistemi e matrici?

I sistemi lineari precedenti si possono riscrivere in forma matriciale. Ad esempio il sistema

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

$$3x_1 - x_3 = 0$$

Si può riscrivere come

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definizione

Un sistema lineare si dice quadrato se ha lo stesso numero di equazioni e di incognite.

Teorema

Un sistema lineare quadrato ha un'unica soluzione se e solo il determinante della matrice associata è diverso da zero (e quindi la matrice ha l'inversa).

Tale soluzione è $x = A^{-1} \cdot b$

Se il determinante è uguale a zero, ci sono due possibilità:

- il sistema non ha soluzioni
- il sistema ha infinite soluzioni

Ad Esempio Il sistema lineare precedente

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

$$3x_1 - x_3 = 0$$

ha come matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il determinante di A vale -11 ed è dunque diverso da 0. Di conseguenza il sistema ha un'unica soluzione

Tale soluzione sarà data dalla formula

$$x = A^{-1} * b$$

Con calcoli che già conosciamo possiamo calcolare A^{-1} e moltiplicare tale matrice per il vettore b

$$\begin{pmatrix} 2/11 & -3/11 & 4/11 & 3 \\ -1/11 & 7/11 & -2/11 & 5 \\ 6/11 & -9/11 & 1/11 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/11 \\ 32/11 \\ -27/11 \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema è dunque

$$x_1 = -9/11, \quad x_2 = 32/11, \quad x_3 = -27/11$$

Per esercizio possiamo verificare che questa terna soddisfa tutte le equazioni del sistema di partenza

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

$$3x_1 - x_3 = 0$$

$$-9/11 + 3*(32/11) + 2*(-27/11) = 3 \quad \rightarrow \text{vero}$$

$$-9/11 + 2*(32/11) = 5 \quad \rightarrow \text{vero}$$

$$3*(-9/11) - (-27/11) = 0 \quad \rightarrow \text{vero}$$

Il metodo di Gauss per risolvere sistemi lineari

Se il sistema non è quadrato o se il determinante è 0 possiamo utilizzare un altro metodo: l'eliminazione di Gauss.

Consideriamo ad esempio il sistema

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

$$x_1 - x_3 = 2$$

$$2x_1 - 2x_3 = 4$$

La matrice associata non è quadrata quindi non posso calcolare il determinante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Considero allora la matrice $A|b$ ottenuta aggiungendo la colonna dei termini noti

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo eseguire delle operazioni per arrivare alla forma

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & X & X & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & X & X \end{pmatrix}$$

Sostituisco alla seconda riga il risultato della differenza tra essa e la prima riga. Ottengo così la matrice

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{array}$$

Analogamente sostituisco alla terza riga il risultato della differenza tra essa e la prima riga

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{array}$$

Sostituisco alla quarta riga il risultato della differenza tra essa e il doppio della prima riga.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -6 & -2 \end{array}$$

La prima colonna è ok, ora bisogna portare la matrice in questa forma

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & X & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & X & X \end{array}$$

Per prima cosa moltiplichiamo la seconda riga per -1

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -6 & -2 \end{array}$$

Sostituisco la terza riga con la somma tra essa e il triplo della prima

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & -6 & -6 & -2 \end{array}$$

Sostituisco la quarta riga con la somma tra essa e sei volte la prima

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & -14 \end{array}$$

A questo punto l'obiettivo è

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & X \\ 0 & 0 & X & X \end{array}$$

Divido la terza riga per 3

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 \\ 0 & 0 & 6 & -14 \end{array}$$

Sostituisco la quarta riga con la differenza tra essa e 6 volte la terza

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Tutte le operazioni fatte fino ad ora non hanno modificato le soluzioni del sistema. A questo punto però i calcoli sono molto più semplici. Dalla matrice

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

otteniamo un nuovo sistema con le stesse soluzioni

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_2 + 2x_3 = -2$$

$$x_3 = -7/3$$

$$0 = 0$$

che possiamo risolvere facilmente «partendo dal basso»

$$x_3 = -7/3$$

Sostituendo nella seconda

$$x_2 + 2 * (-7/3) = -2$$

$$x_2 = -2 + 14/3 = 8/3$$

Sostituendo nella prima

$$x_1 + 3*(8/3) + 2*(-7/3) = 3$$

$$x_1 = 3 - 8 + (14/3)$$

$$x_1 = -1/3$$

Verifichiamo anche in questo caso che la soluzione trovata

$$x_1 = -1/3, \quad x_2 = 8/3, \quad x_3 = -7/3$$

sia corretta sostituendo i valori nel sistema di partenza

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

$$x_1 - x_3 = 2$$

$$2x_1 - 2x_3 = 4$$

$$-1/3 + 3*(8/3) + 2*(-7/3) = 3 \quad \rightarrow \text{vero}$$

$$-1/3 + 2*(8/3) = 5$$

-> vero

$$-1/3 - (-7/3) = 2$$

-> vero

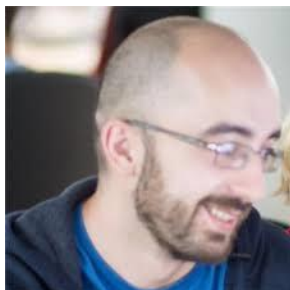
$$2*(-1/3) - 2*(-7/3) = 4$$

-> vero

Informazioni sull'autore

Nicola Iantomasi

Mi chiamo Nicola Iantomasi e dopo cinque anni di esperienza come sviluppatore SQL e progettista Datawarehouse, ho fondato **Yimp - La scuola dei dati** per erogare corsi, consulenze e lezioni ad aziende, privati e studenti.



Il nostro focus è sul mondo dei database, l'Sql, la programmazione in Python, il machine learning, l'intelligenza artificiale, Microsoft Excel, la matematica e la statistica.

Se vuoi informazioni sui miei corsi, sulle mie attività o se hai semplicemente delle domande sul contenuto di questo libro, scrivimi alla mail **nicola.iantomasi@yimp.it** o visita il sito <http://www.yimp.it>